GAMMA γ 7
Setembro 2007

AS ECUACIÓNS E AS TIC

Abel Martín
IES Pérez de Ayala de Oviedo
Marta Martín Sierra
Facultade de Matemáticas. Univ. de Oviedo

Resumo

Presentamos o resultado dunha experiencia levada a cabo no aula con alumnos da ESO na que, coa aparición de novas tecnoloxías, utilizamos metodoloxías alternativas ás tradicionais na resolución de ecuacións, máis visuais, dende outra óptica, co obxectivo fundamental dunha mellor comprensión dos conceptos, pudindo dedicar moito máis tempo á análise reflexivo dos resultados e a pensar.

Abstract

The report shows the result of work carried out in the classroom with secondary (key stage 3) pupils. We have used alternative methods to the traditional ones to solve equations, looked from another point of view and used more visual stimuli and IT. The fundamental aim has been a greater understanding of the concepts and to enable us to dedicate much more time to reflexive analysis of the results.

Presentamos o resultado dunha experiencia levada a cabo na aula con alumnos de ESO, de diferentes niveis, onde poderemos observar distintas estratexias educativas que xurdiron coa aparición das novas tecnoloxías, para afrontar a ensinanza das Matemáticas.

Ao final do curso lectivo, cando os nosos alumnos coñecen xa os fundamentos das ecuacións, as funcións e as representacións gráficas, presentamos unha actividade para resolver na casa. Comprobaremos a posibilidade de demostrar de forma "gráfica" e visual contidos realizados coas Matemáticas tradicionais, onde se oen habitualmente expresións como as que seguen:

O 2 que está sumando pasa restando e o 3 que está divdindo pasa multiplicando…
¿Pasa? ¿Por onde? ¿Que é iso?

Actividade proposta I

Acha un número tal que o seu dobre aumentado nunha unidade sexa igual que o seu triplo diminuído en 23 unidades. Cal é ese número?

Método I

Todos os alumnos que traballaron a actividade, resolvérona de forma alxébrica, segundo aparece a continuación, tal e como se estudou ao longo do currículo. Ninguén se atreveu a resolvela mentalmente ou por ensaio e erro, pois dan por suposto que o profesor considerará a solución aportada como non válida, xa que, entre outras cosas, poden tella preguntado a outro alumno.

1. Lectura comprensiva do enunciado verbal

2. Determinación de incógnitas

$$x = \text{“número buscado”}$$

3. Formulación e transcrición á linguaxe alxébrica

$$2 \cdot x + 1 = 3x - 23$$

4. Resolución

$$2x - 3x = -1 - 23$$
$$-x = -24$$
$$x = 24$$

5. Comprobación no enunciado verbal

$$x = \text{“número buscado”} : \mathit{24}$$
$$2 \cdot \mathit{24} + 1 = 3 \cdot \mathit{24} - 23$$
$$49 = 49 \quad \textbf{Válida}$$

6. Análise crítica dos resultados

O número buscado é o 24

Método II. Resolución da ecuación coa axuda das opcións gráficas e táboas dunha calculadora gráfica

Buscamos un método alternativo, utilizando un ordenador con calquera tipo de software para representación de funcións ou con calculadora gráfica, como xa ocorre nas "aulas" da case totalidade dos países "desenvolvidos", incluídas gran parte das nosas Comunidades Autónomas. O uso da calculadora gráfica permítenos comprobar rapidamente e de forma visual, aquilo que estamos buscando, cun enfoque máis investigador e innovador, dando prioridade ao razoamento, permitíndonos máis tempo para pensar e analizar o que facemos e os resultados que obtemos.

2x + 1 = 3x - 23

Consideraremos cada un dos membros da ecuación como unha función independente (recorda que “resolver unha ecuación” é buscar o valor de “x” que verifique a igualdade do enunciado):

$y_1 = 2x + 1$ (un número tal que o seu dobre aumentado nunha unidade)

Xeramos unha táboa de valores, onde se poden observar algúns dos infinitos números que se obteñen ao aumentar o seu dobre nunha unidade.

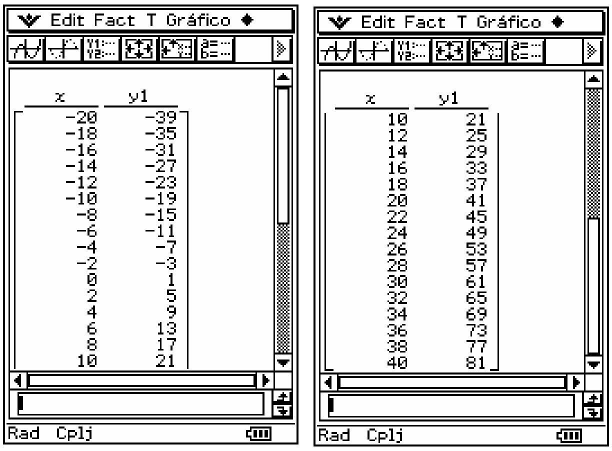


Fig. 1

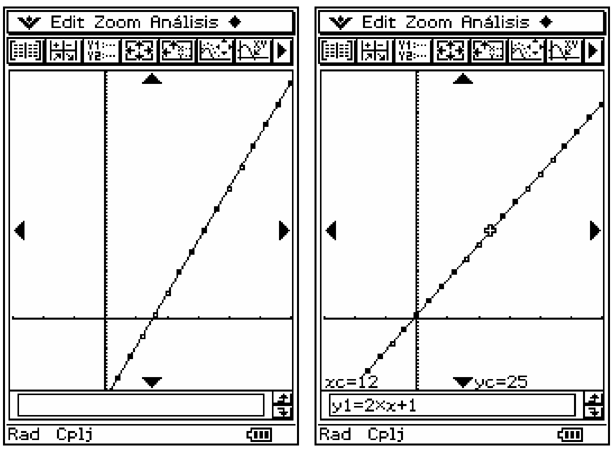


Fig. 2

Representámolos para observar algúns dos valores que toman e que, como vemos, están en liña sobre unha recta.

$y_2 = 3x - 23$ (o triplo dun número diminuído en 23 unidades)

Xeramos outra táboa de valores, onde se poden observar algúns dos infinitos números que se obteñen ao diminuír en 23 unidades o triplo de dito número.

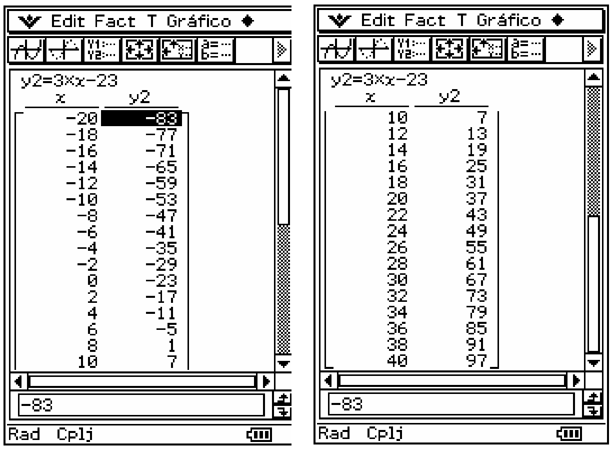


Fig. 3

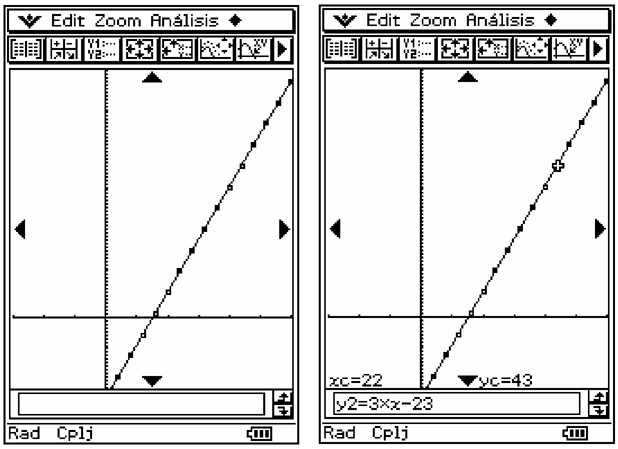


Fig. 4

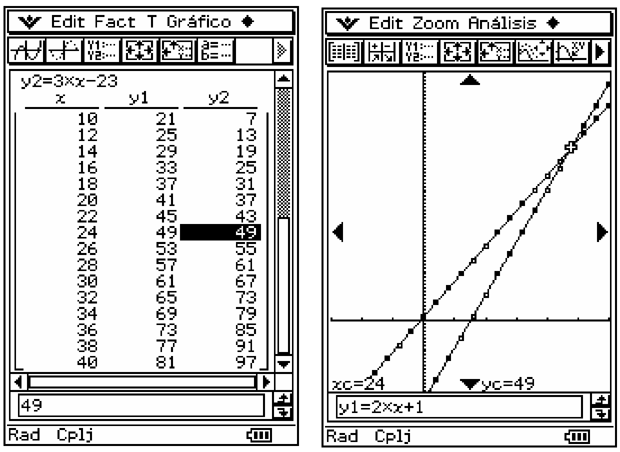


Fig. 5

Como vemos no enunciado: “acha un número tal que o seu dobre aumentado nunha unidade *sexa igual* que o seu triplo diminuído en 23 unidades”, temos que buscar cal ou cales dos infinitos pares de solucións son iguais ($y_1 = y_2$).

Tanto nesta táboa de volores como na representación gráfica (Fig. 5) chegamos ata a solución buscada.

Solución: o número buscado é o 24

Unha vez vistas estas sinxelas ecuacións polinómicas de primeiro grao con este *método II*, pasaremos a resolver con esta mesma metodoloxía outros tipos de ecuacións.

Ecuacións de segundo grao:

Actividade proposta II

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Neste caso haberá que buscar cándo a función é igual a cero, é dicir, en qué punto corta ao eixe de abscisas.

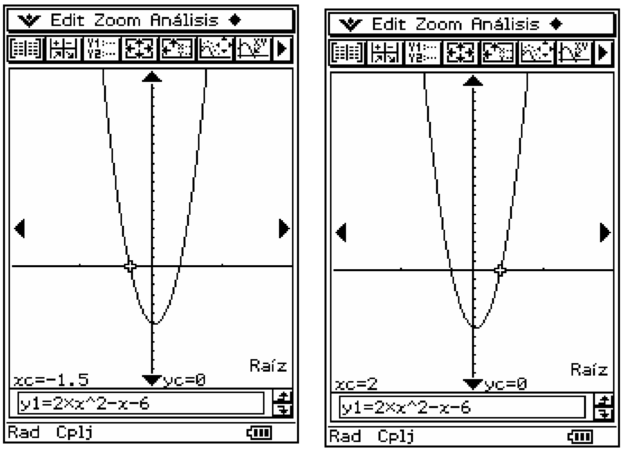


Fig. 6

Trátase dunha ecuación de segundo grao con 2 solucións.

Solución : $x_1 = -1.5$ $x_2 = 2$

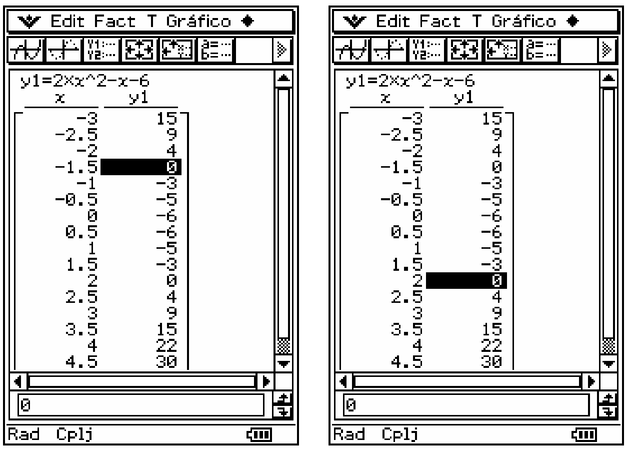


Fig. 7

Actividade proposta III

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Este é o caso de solución dobre (x = 5) e que a gráfica nos axuda a comprender facilmente: corta ao eixe de abscisas nun só punto.

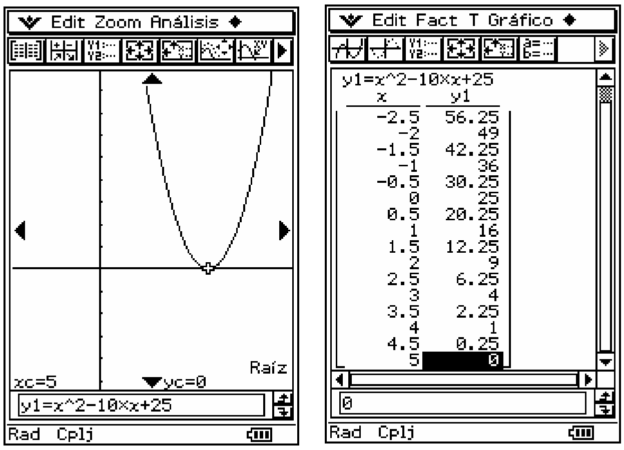


Fig. 8

Actividade proposta IV

$$x^2 - 4x + 10 = 0$$

Alxebricamente, estamos ante un caso no que obtemos unha solución imaxinaria: a gráfica non corta ao eixe de abscisas en ningún punto.

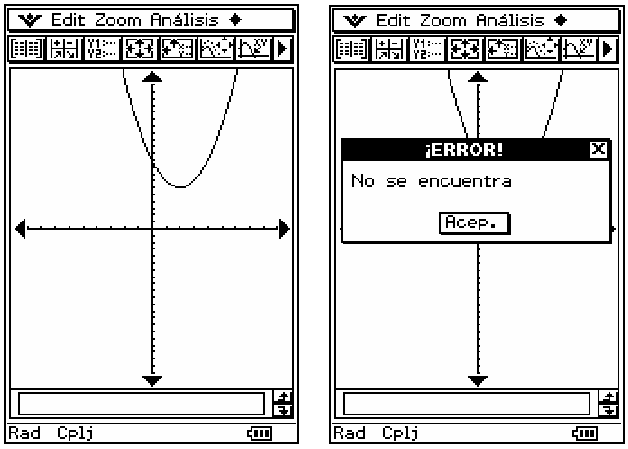


Fig. 9

Ecuacións de terceiro grao ou superior

Actividade proposta V

$$x^3 + 2x^2 = 0$$

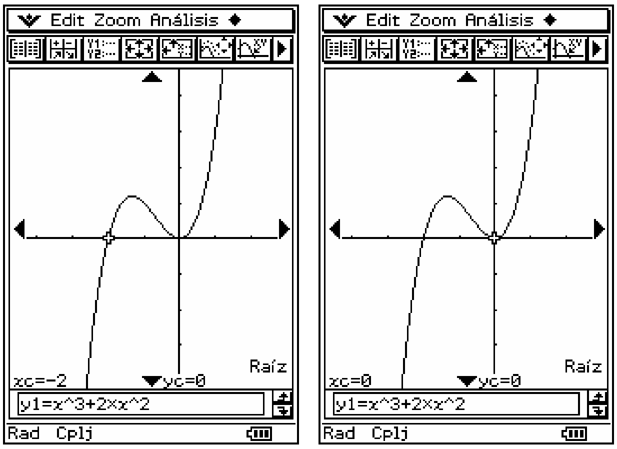


Fig. 10

Solucións: $x_1 = -2$ $x_2 = 0$

Actividade proposta VI

$$\mathbf{x^5 - 5x^3 + 4x = 0}$$

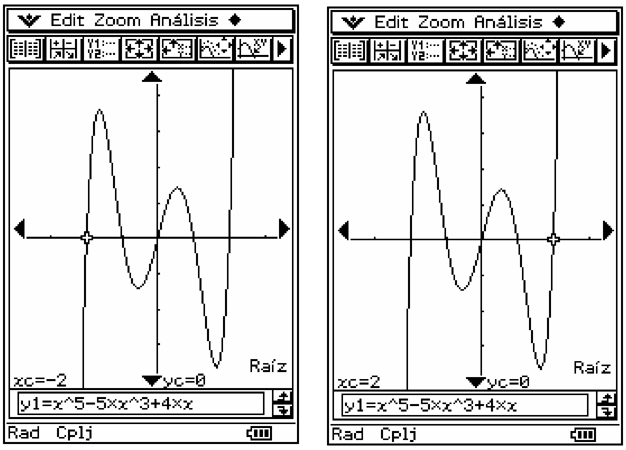


Fig. 11

Solucións:
$x_1 = -2$
$x_2 = -1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 1$
$x_5 = 2$

Ecuacións racionais

Actividade proposta VII

$$\mathbf{\frac{x}{(x-2)(x+1)} = 0}$$

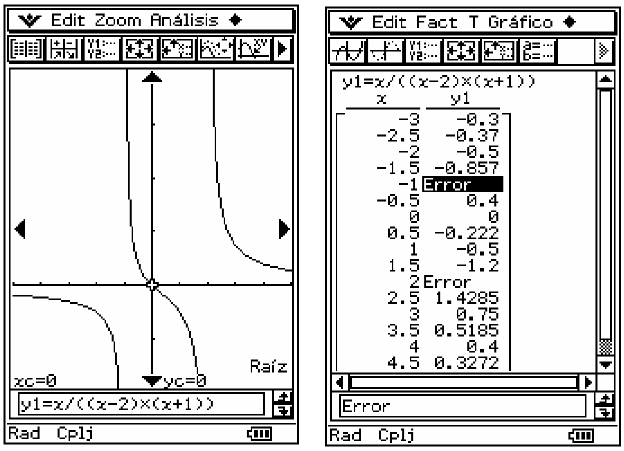


Fig. 12

Solución: x = 0

Este é un bo momento, coa gráfica e os resultados da táboa de valores, para reforzar o concepto de asíntota vertical, xa que a súa comprensión é moi intuitiva: en x = 1 e x = 2 a función non existe.

Ecuacións irracionais

Actividade proposta VIII

$$\mathbf{\sqrt{3x-2} = 4}$$

Neste tipo de ecuacións, se o resolvemos de forma gráfica, eliminaos as solucións *non válidas* que se obteñen cando se resolve alxebricamente. Recorda que neste tipo de ecuacións, cando alxebricamente elevamos ambos membros ao cadrado, ao final temos que comprobar as solucións iniciais para ver se son válidas ou non.

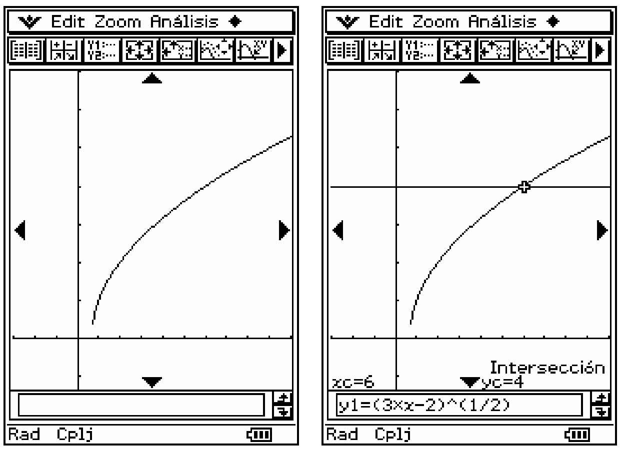


Fig. 13

Solución: x = 6

Por que ao elevar ao cadrado ambos membros dunha ecuación podemos obter solucións *non válidas*?

Ímonos deter un pouco nesta cuestión, presentada polos autores nas XII JAEM de Albacete, en 2005, e que podedes ver integramente en *www.aulamatematica.com* na sección de "artículos".

Actividade proposta IX

$$\sqrt{7-3x} - x = 7$$

Método alxébrico:

$$\sqrt{7-3x} = 7 + x$$

$$(\sqrt{7-3x})^2 = (7+x)^2$$

$$7-3x = 49 + x^2 + 14x$$

$$-x^2 - 17x - 42 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289-168}}{-2}$$

$$x = \frac{17 \pm 11}{-2}$$

$$x_1 = \frac{17+11}{-2} = \frac{28}{-2} = -14$$

$$x_2 = \frac{17-11}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

Comprobación:

$$\sqrt{7-3x} - x \quad = \quad 7$$

$$x_1 = -14 \qquad \sqrt{7-3\cdot(-14)} + 14 \quad = \quad 7$$

$$\sqrt{7+42} + 14 \quad = \quad 7$$

$$\sqrt{49} + 14 \quad = \quad 7$$

$$21 \quad \neq \quad 7$$

Solución non válida

$$x_2 = -3 \qquad \sqrt{7-3(-3)} - (-3) \quad = \quad 7$$

$$\sqrt{7+9} + 3 \quad = \quad 7$$

$$4 + 3 \quad = \quad 7$$

$$7 \quad = \quad 7$$

Solución válida

Solución: x = -3

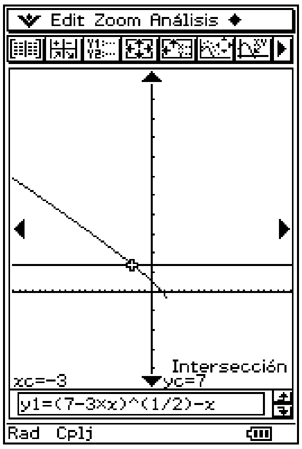


Fig. 14

Estamos a traballar coas funcións:

$y_1 = 7 - 3x$ e $y_2 = 49 + x^2 + 14x$

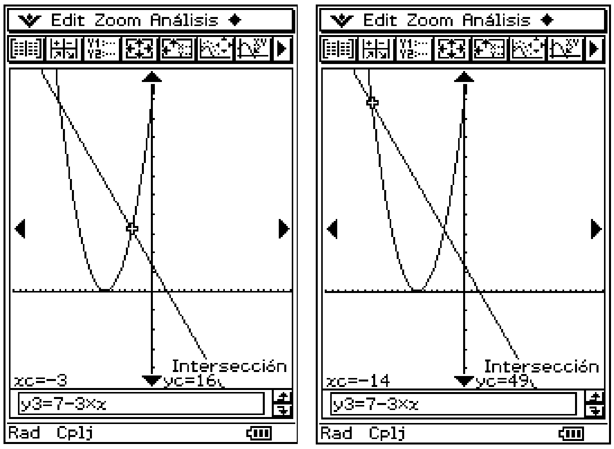
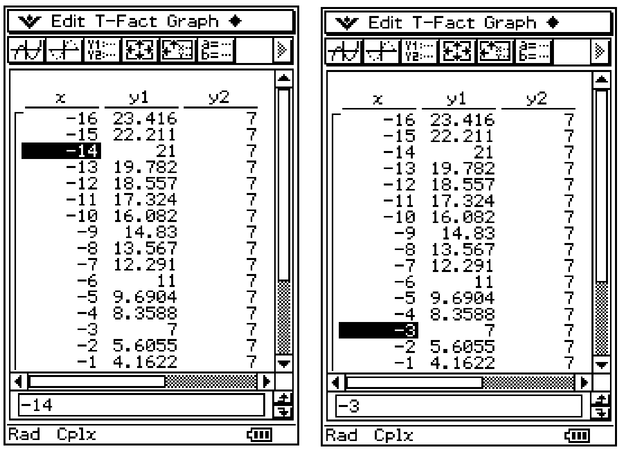


Fig. 15

Por métodos alxébricos orixinamos modificacións nas funcións, cos correspondentes cambios de comportamento, segundo se pode ver nas súas gráficas e nas táboas de valores a continuación. Aínda que segue manténdose o valor de x = - 3 no punto de corte, neste caso aparece un novo x = - 14, que se rexeita. Na ecuación do enunciado teriamos:



x	y1	y2
-16	23.416	7
-15	22.211	7
-14	21	7
-13	19.782	7
-12	18.557	7
-11	17.324	7
-10	16.082	7
-9	14.83	7
-8	13.567	7
-7	12.291	7
-6	11	7
-5	9.6904	7
-4	8.3588	7
-3	7	7
-2	5.6055	7
-1	4.1622	7

Fig. 16

Na ecuación despois da transformación:

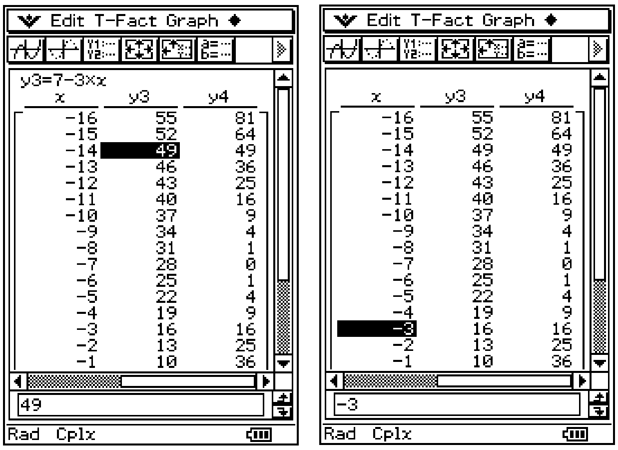


Fig. 17

x = -14 solución non válida

x = -3 solución válida

Así poderiamos seguir resolvendo ecuacións con suma facilidade, moito máis complexas e traballosas por métodos alxébricos: exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, etc.

Outra das opcións que teñen este tipo de máquinas con *álxebra simbólica* é a resolución inmediata co seu potente software.

Moitos son os profesores que se opoñen a elas xa que temos a sensación de que llelo van facer todo, pero nada máis lonxe da realidade. Fixémonos na realización do seguinte exercicio; se o que pretendemos é avaliar a transcrición correcta do problema dado en linguaxe cotiá á linguaxe alxébrica, a determinación das incógnitas… a calculadora NON PODE FACELO POR SI SOA, aínda que si que é de gran axuda para resolvelo unha vez introducidos os datos correctamente e así poder dedicarnos ao estudo e á análise reflexiva dos resultados. Sempre hai que fixarse no obxectivo marcado nese momento.

Actividade proposta X

Un cabalo ten 3 metros de lonxitude. A cabeza mide o mesmo que o colo; o corpo, o dobre do colo e a cola, 0.75 metros menos que a cabeza. Canto mide a cola do cabalo?

1. Lectura comprensiva do enunciado verbal

2. Determinación de incógnitas

x = “lonxitude da cabeza”
x = “lonxitude do colo”
2x = “lonxitude do corpo”
x – 0.75 = “lonxitude da cola”

3. Formulación e transcrición á linguaxe alxébrica

$$x + x + 2x + x - 0.75 = 3$$

4. Resolución
5. Comprobación no enunciado verbal

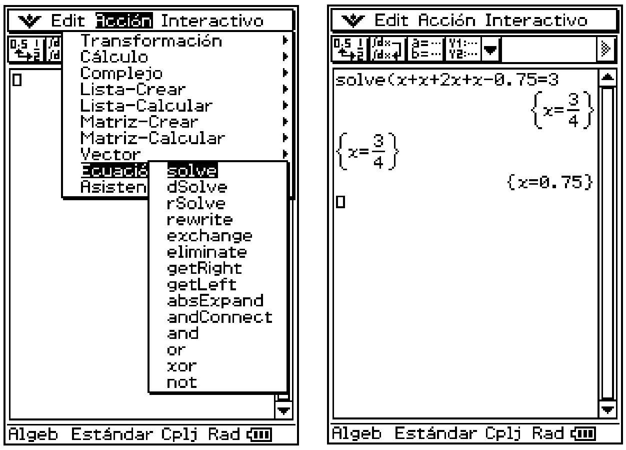


Fig. 18

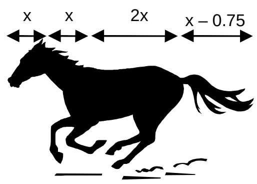


Fig. 19

x = “lonxitude da cabeza” : 0.75
x = “lonxitude do colo” : 0.75
2x = “lonxitude do corpo” : 1.5
x – 0.75 = “lonxitude da cola” : 0
0.75 + 0.75 + 1.5 + 0 = 3 **Válida**

6. Análise crítica dos resultados

O cabalo, en realidade, non ten cola.

Derribemos pouco a pouco esas barreiras e démoslle prioridade ao razoamento, á reflexión e á comprensión de conceptos, fuxindo de cálculos matemáticos superfluos, sen rexeitar calquera medio que nos poida axudar na nosa práctica diaria.

Máis información:
www.aulamatematica.com

Para calquera dúbida, intercambio de opinións, materiais, suxestións, petición de materiais... non dubidedes en poñervos en contacto con nós:
aulamatematica@gmail.com