# LA CALCULADORA GRÁFICA Y LA SELECTIVIDAD: TIPOS DE FUNCIONES: GRÁFICAS Y ESTUDIO LOCAL.

**ABEL MARTÍN**, profesor de Matemáticas y Física y Química IES La Ería (Oviedo).

aulamatematica@gmail.com

**INTRODUCCIÓN:** El resto de Europa ya utiliza habitualmente la calculadora gráfica como herramienta habitual; las autoridades educativas de determinadas Comunidades Autónomas españolas, como no podía ser menos, también comienzan a autorizarla en los últimos años en las pruebas de SELECTIVIDAD y PAAU. Vamos a detenernos un momento en la Comunidad catalana, una de las pioneras en este sentido, donde los problemas que se siguen proponiendo en dichas pruebas siguen siendo prácticamente los mismos de antes, aunque, como se menciona el los documentos oficiales donde se explica **LA <u>ESTRUCTURA DEL EJERCICIO Y LOS CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN de la PAAU de Catalunya</u>** se añaden coletillas como ésta:

*"... tendrán que explicarse muy bien los problemas y los razonamientos que se hacen: la función es creciente pues la derivada es positiva..."*

olvidándose de que pueden existir estrategias alternativas, tan válidas como las tradicionales, que permitan buscar nuevos enfoques, nuevos objetivos, nuevos procedimientos...

Por todo ello, la principal dificultad a la hora de desarrollar didácticamente ejercicios propuestos en las PAAU ha sido METODOLÓGICA, intentando siempre **<u>conjugar</u>** la resolución mediante LÁPIZ Y PAPEL con aquellas que te permiten ampliar este tipo de máquinas, desarrollando los ejercicios al detalle, explicando todos y cada uno de los pasos dados, comprobando si hemos cometido algún error al efectuar los cálculos de forma tradicional y buscando estrategias alternativas de cálculo, más visuales y palpables, diferentes a las habituales, que permitan contrastar nuestros planteamientos.

## ACTIVIDAD PROPUESTA EN LAS PAAU CATALUNYA DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
## LOGSE SEPTIEMBRE DE 2000 (SERIE 6)

Consideramos la función $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$

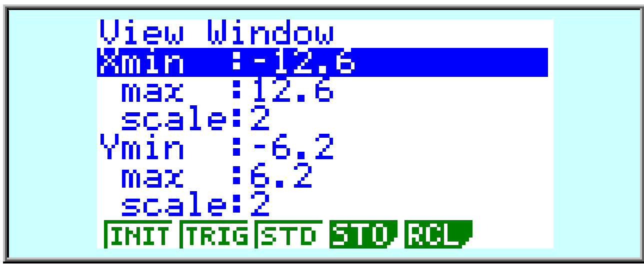
(a) Determina sus asíntotas verticales y horizontales (si las tiene) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. A continuación haz un esquema sencillo de su gráfica.

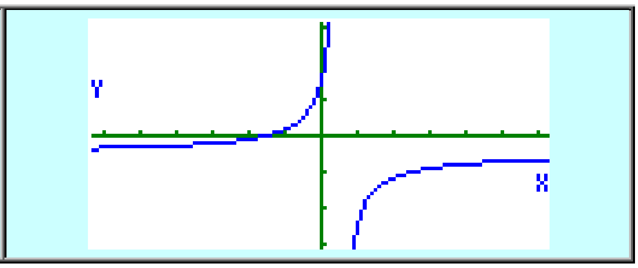
(b) Determina los puntos de la gráfica de la función donde la tangente es paralela a la recta de ecuación $y = x$.

## RESOLUCIÓN apartado a

Como ya hemos dicho, este es un tipo de problemas en los que la calculadora gráfica cobra tal protagonismo que es capaz de resolverlos en su práctica totalidad; por eso hemos de explicar muy bien los **razonamientos** que vamos haciendo y, hasta que no se clarifique aún más la metodología de corrección con la autorización de la calculadora gráfica, apoyarlo completamente con el desarrollo matemático, eso sí, con la garantía de ir comprobando visualmente todo lo que hacemos.

Iniciamos el problema realizando una gráfica sencilla de la función para ir visualizando todo aquello que vayamos calculando analíticamente:




Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{1-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{1-x} = -1$$

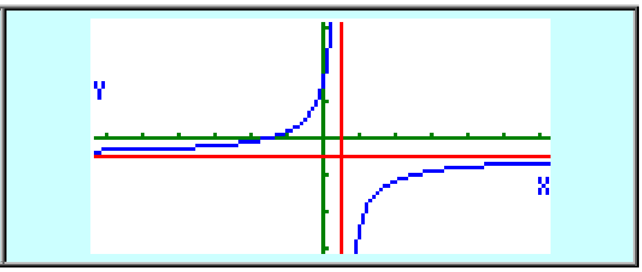
**Tiene una asíntota horizontal para y = – 1**

Asíntotas verticales:

Para x = 1 el denominador de la función se hace cero

**Tiene una asíntota vertical para x = 1**

Representamos las asíntotas y comprobamos que, efectivamente, la función tiende a ellas:


**INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO**

Para que f(x) sea creciente ⇨ f'(x) > 0

Para que f(x) sea decreciente ⇨ f'(x) < 0

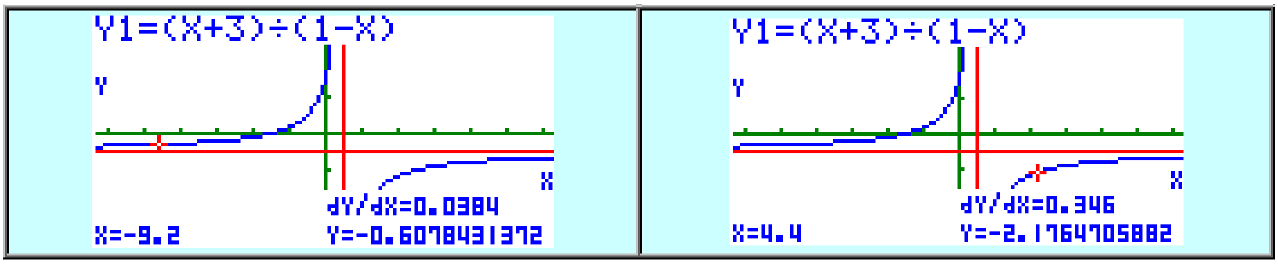
$$f'(x) = \frac{1(1-x)-(x+3)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}$$

Estudiamos el signo de esta nueva función:

Como el numerador siempre es positivo y el denominador también (es una expresión cuadrática), f'(x) será siempre mayor que 0, es decir, creciente en todo su dominio.

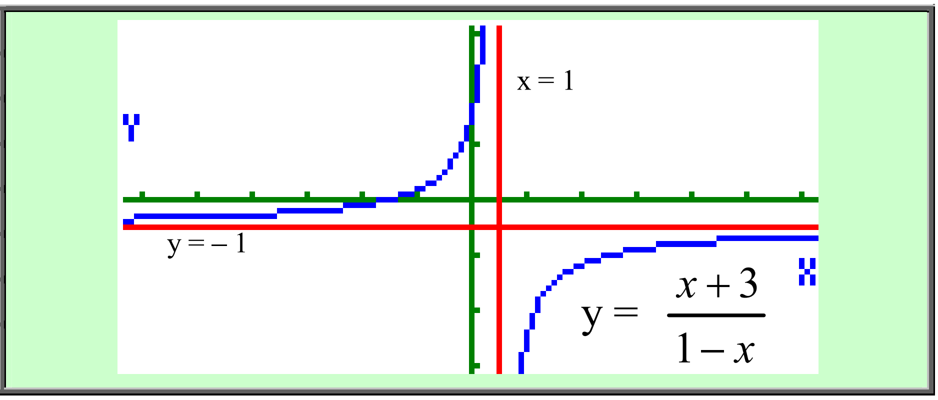
También podemos ratificar todos estos resultados con la calculadora gráfica, mediante la función **TRACE**, moviéndonos por la gráfica y comprobando que los valores que toma la derivada primera de la función en cada punto son siempre mayores que 0:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' > 0$$




Hacemos una sencilla tabla de valores para completar los resultados obtenidos y así hacer un esbozo de la gráfica: y = $\frac{x+3}{1-x}$

| x | y |
|---|---|
| - 5 | 0.33 |
| - 3 | 0 |
| 0 | 3 |
| 0.5 | 7 |
| 2 | - 5 |
| 5 | - 2 |
| 10 | - 1.4 |




## RESOLUCIÓN apartado b

Sabemos que en la ecuación de la recta dada en la forma y = mx + b, el valor de "m" determina la pendiente de dicha recta

$$y = x \Rightarrow y = 1x + 0$$

$$\mathbf{m = 1}$$

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la tangente a la función en dicho punto. [f'($x_0$) = m]

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$$

$$\text{Así pues } \frac{4}{(1-x)^2} = 1$$

$$4 = (1-x)^2 \Rightarrow 4 = 1 + x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{x+3}{1-x} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \rightarrow \quad (3,\ -3)$$

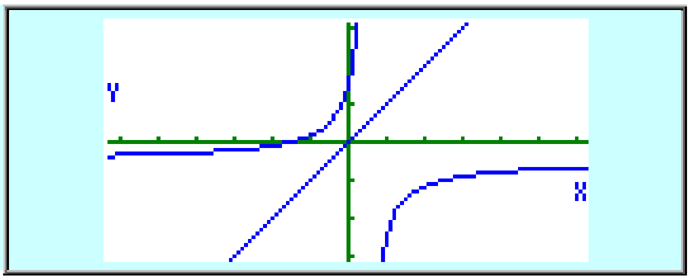
$$x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{x+3}{1-x} = \frac{2}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad (-1,\ 1)$$

## ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

**Los puntos de la gráfica de la función donde la tangente es paralela a la recta de ecuación y = x son el (3, – 3) y (– 1, 1).**

Visualicemos todos estos resultados; una vez dibujada la gráfica, eliminamos las asíntotas para que no haya un exceso de líneas que nos induzcan a confusión y añadimos la recta y = x

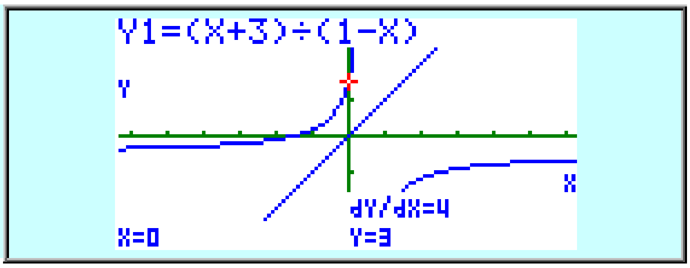
▼ F2 (DEL) F1 (YES) ▼ F2 (DEL) F1 (YES) x,θ,T EXE



Dibujamos las tangentes a la función en los 2 puntos obtenidos con lápiz y papel

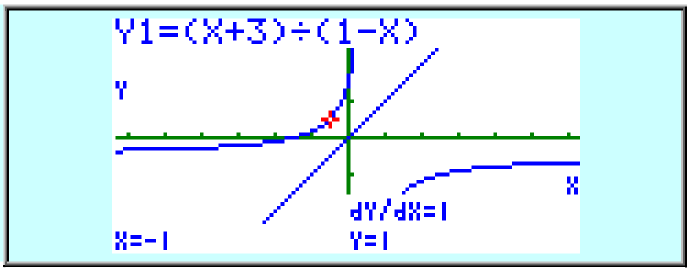
**(1, – 1) (3, – 3)**

SHIFT F4 (SKTCH) F2 (Tang)

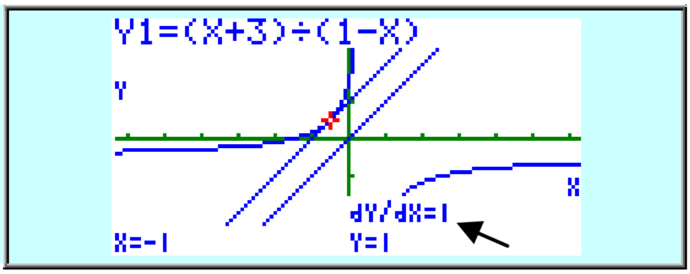



y buscamos el punto (– 1, 1)

◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀



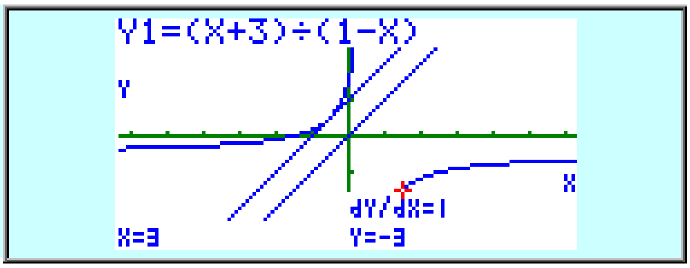

EXE



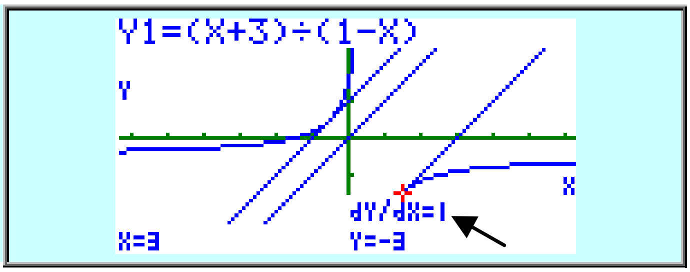

y vemos que ahí, efectivamente, la pendiente de la función es 1.

Buscamos el punto (3, – 3)

SHIFT SKTCH F4 Tang F2 ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ …

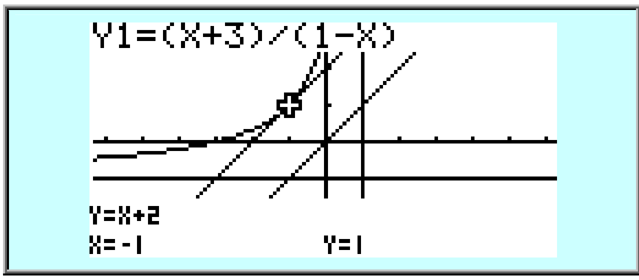


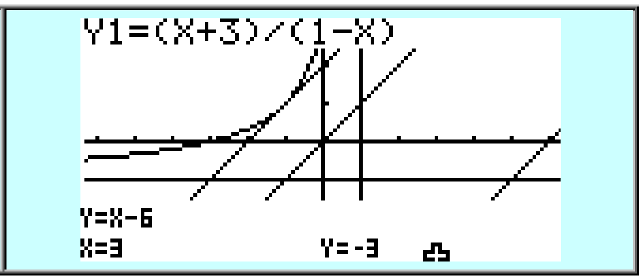

EXE




... y vemos que ahí, efectivamente, es paralela a la función y = x y la pendiente de la función es 1

NOTA: La calculadora ALGEBRA FX 2.0 nos daría incluso las ecuaciones de las rectas tangentes ⇨ y = x + 2 ; y = x – 6

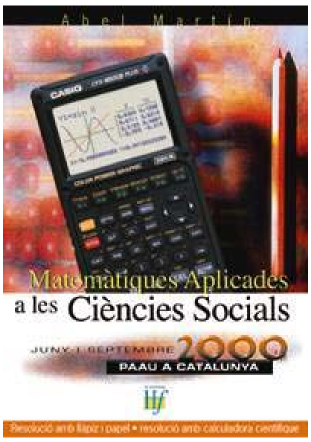



## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN: 4 PUNTOS.

NOTA: La colección de ejercicios propuestos en Catalunya en las PAAU de junio y septiembre de 2000, con esta metodología, utilizando como herramienta auxiliar la calculadora gráfica, han sido publicadas por el autor, con el titulo:

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (versión castellano) y editada por HF EDITORES. Para más información www.aulamatematica.com o bien a través del email que figura al principio del artículo.




**Incluimos las 4 PRUEBAS COMPLETAS de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales LOGSE propuestas en las convocatorias de junio y septiembre de 2000 en las diferentes Universidades Catalanas:**

**señalando y concretando los OBJETIVOS y los CONTENIDOS del currículum, DESARROLLANDO los ejercicios al detalle, indicando en todos ellos, como novedad, los CRITERIOS DE CORRECCIÓN aportando, en cada ejercicio, la propuesta de resolución con CALCULADORA GRÁFICA, conscientes de que la irrupción de dicha herramienta en el aula comienza a ser imparable.**