OPTIMIZACIÓN DE MODELOS FUNCIONALES. LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y LA CALCULADORA GRÁFICA.

Abel Martín. Dpto. Matemáticas IES La Ería de Oviedo.

INTRODUCCIÓN

Se pretende en esta comunicación presentar el desarrollo del bloque temático **la Programación Lineal**, tal y como se ha tratado en un grupo de 2ª de Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales, TOMANDO COMO EJEMPLO una actividad de las más complejas en su desarrollo y comprensión de conceptos.

Podemos destacar dos principios básicos en la metodología empleada:

Las clases se basan, de una forma sistemática, en la resolución de problemas.

Se utiliza, de modo habitual, ***la calculadora gráfica*** (en nuestro caso la ClassPad 300 de CASIO) como herramienta de trabajo.

Se comienza la Unidad proporcionando a los alumnos y alumnas conocimientos que permitan concretar qué es la programación lineal y sus objetivos, destacando su importancia en la organización y planificación de la industria y en el aumento de la efectividad económica.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Un comerciante dispone para esta Navidad 120 botellas de sidra, 110 cajas de turrón y 70 bolsas de mazapán, con las que quiere confeccionar dos lotes de regalos A y B.

El lote A consta de 2 botellas de sidra, 1 caja de turrón y 1 bolsa de mazapanes, mientras que el lote B consta de 1 botella de sidra, 2 cajas de turrón y 1 bolsa de mazapanes.

Por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 4 € y 2 € por cada uno del tipo B.

(a) ¿Cuántos puede realizar de cada clase?.

(b) ¿Cuántos debe de hacer de cada clase para maximizar sus ganancias? ¿Cuál es el beneficio obtenido en ese momento?.

Resolución apartado (a)

El primer paso será traducir el problema al lenguaje algebraico. Aquí la labor del profesor es importante ya que suele ser el lugar donde se cometen frecuentemente los errores.

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS:

x ≡ "número de lotes del tipo A"

y ≡ " número de lotes del tipo B"

CONJUNTO DE RESTRICCIONES:

Estas variables observamos que se encuentran sometidas a unas restricciones expresadas en forma de desigualdades; como decíamos anteriormente, el profesor, como moderador, hará ver la necesidad de utilizar inecuaciones para enunciar dichas limitaciones.

Botellas sidra:	$2x + y \leq 120$	→	$2x + y \leq 120$
Cajas turrón:	$x + 2y \leq 110$	→	$x + 2y \leq 110$
Bolsas mazapán:	$x + y \leq 70$	→	$x + y \leq 70$
	$x \geq 0$	→	$x \geq 0$
	$y \geq 0$		$y \geq 0$

Es en este momento donde podemos reforzar los conceptos y procedimientos teóricos de resolución de sistemas de inecuaciones de 2 incógnitas vistas en 1º de bachillerato.

Al resolver el sistema obtendremos, en el caso de que tenga solución, una región del plano que llamaremos REGIÓN FACTIBLE y que será muy fácil y espectacular dibujar con la ayuda de la calculadora gráfica; para ello colocaremos las inecuaciones en forma explícita:

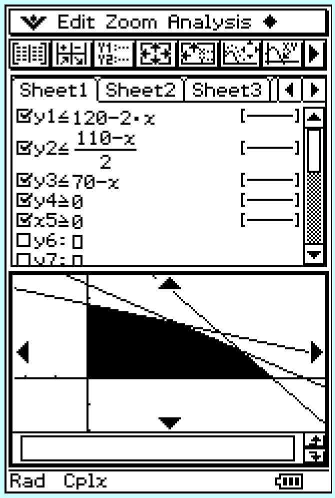
$$y \le 120 - 2x$$

$$y \le \frac{110 - x}{2}$$

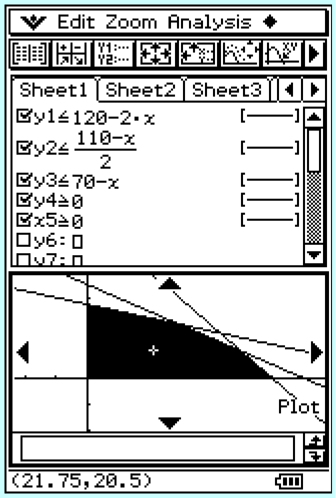
$$y \le 70 - x$$

$$y \ge 0$$

$$x \ge 0$$



Luego, moviendo los cursores, podremos ir observando los infinitos puntos que hay en el interior del recinto, como se puede apreciar en la imagen de la derecha.



El número de unidades de cada tipo de lote que puede confeccionar viene representado por los puntos (x, y) pertenecientes a la región factible, donde "x" es el número de unidades del lote de tipo A e "y" es el número de unidades del lote de tipo B, con la condición de que tanto "x" como "y" sean números naturales:

Ejemplo: (29, 17) $\in$ Región factible: 29 unidades del lote de tipo A y 17 del lote de tipo B; otros puntos: (22, 19), (17, 12), (14, 7), (38, 3), etc.

Resolución apartado (b)

Este problema, con 2 variables, implica la existencia de un modelo funcional que será el que hay que optimizar y que denominaremos **FUNCIÓN OBJETIVO**:

B(x, y): Beneficio expresado en €

B(x, y) = 4x + 2y

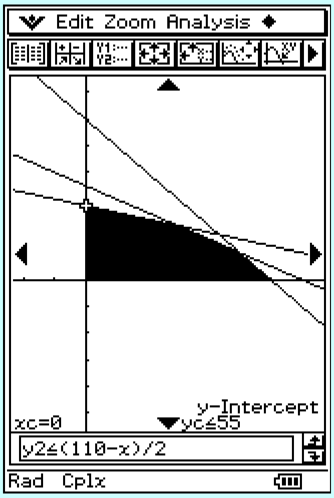
LOCALIZACIÓN DE SOLUCIONES:

Teorema: Como la región factible existe y está acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanzará en uno de los vértices del polígono que limita la región, o a lo largo de uno de los lados.

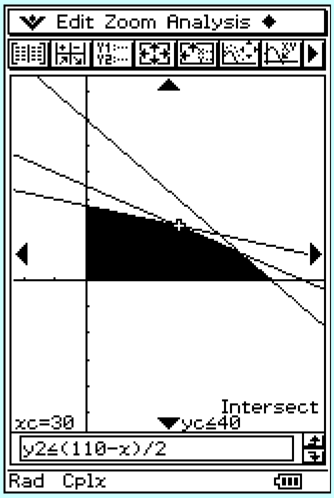
Por lo tanto, lo primero que tendremos que hacer es averiguar los VÉRTICES del polígono que constituye la región factible.

Con la calculadora estos vértices se averiguan en breves instantes, mientras que si lo hacemos con lápiz y papel tendremos que acudir a sencillos, pero quizás demasiado extenso para el nivel que nos encontramos, sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

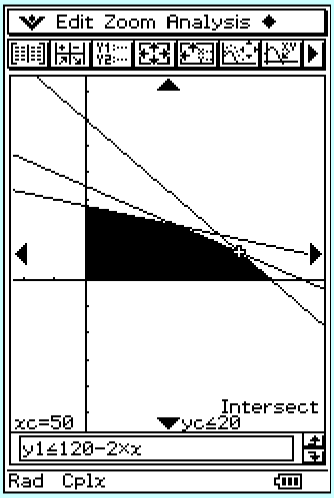
CÁLCULO DE VÉRTICES



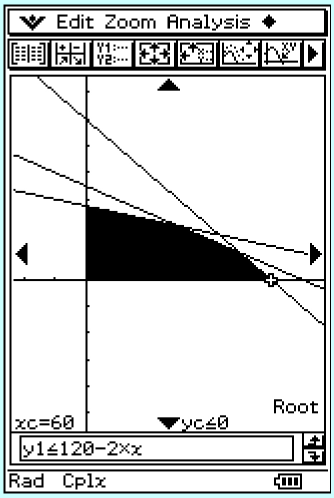
A(0, 0)   B(0, 55)



C(30, 40)



D(50, 20)



E(60, 0)

ANÁLISIS DE ÓPTIMOS

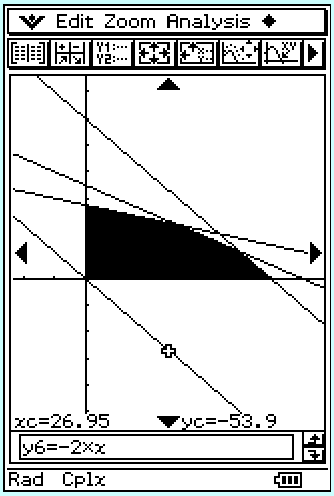
(1) Método gráfico:

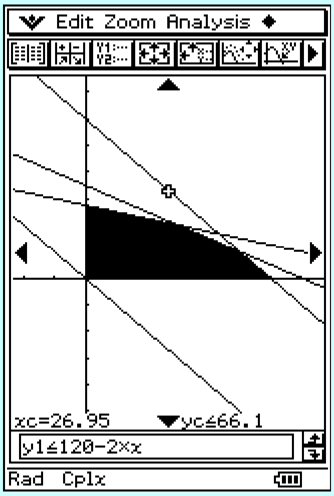
Veamos la recta que representa a la función objetivo cuyos beneficios sean nulos:

$$4x + 2y = 0$$

$$2y = -4x \qquad \rightarrow \qquad y = -2x$$

De todas las infinitas rectas paralelas (m = - 2) a ésta de beneficios nulos que pasan por el conjunto de restricciones, la que corresponde al beneficio máximo será aquella que corte al eje OY por el punto más lejano al origen; para ello, y aplicando el teorema antes mencionado, representaríamos todas aquellas que pasan por los vértices pero, EN LA PRÁCTICA, con la calculadora gráfica, no se representan todas las líneas de nivel, cosa que se haría larga y tediosa, sino que se representa ÚNICAMENTE la que hace los beneficios nulos $y = -2x$ para luego, MENTALMENTE, trazar paralelas que pasen por los demás vértices y comprobar cuál es la "línea de nivel" de mayor ordenada en el origen.



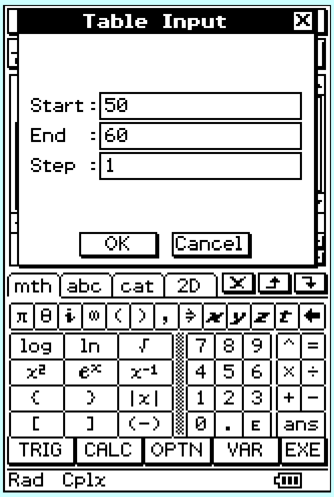


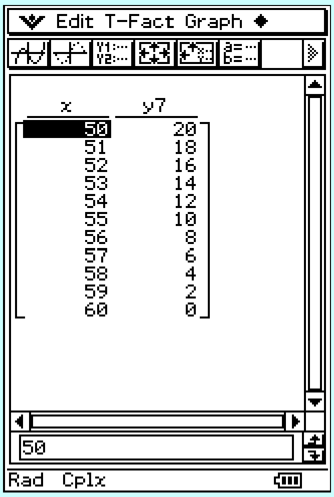
En este preciso problema, no muy corriente en la programación lineal, la "LÍNEA DE NIVEL" paralela a $y = -2x$ (pendiente -2) cuya ordenada en el origen es mayor, pasará tanto por el vértice C como por el D; sólo hay que pensar que esta recta que pasa por estos vértices es $y = 120 - 2x$, es decir, con pendiente $m = -2$ y por tanto, paralela a $y = -2x$.

Así pues, tendrá solución múltiple:

"Se obtendrá máximo beneficio cuando se hagan entre 50 y 60 lotes de tipo A y su correspondiente valor numérico de lotes de B que verifiquen la ecuación $y = 120 - 2x$.

Así, las posibles soluciones son:





B(x, y) = 4x + 2y

B(x, y) = 4·50 + 2·20 = 240

momento en el que los beneficios ascienden a 240 euros.

(2) Método con lápiz y papel:

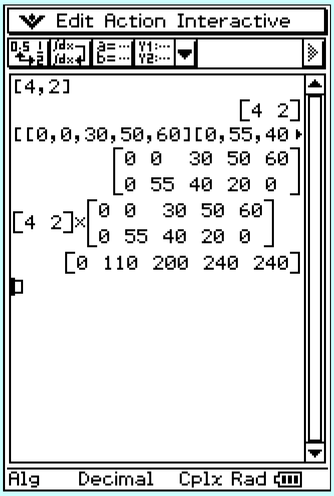
Vértices	**Beneficio = 4·x + 2·y**	Valor
A (0, 0)	**4·0 + 2·0**	0
B(0, 55)	**4·0 + 2·55**	110
C(30, 40)	**4·30 + 2·40**	200
D(50, 20)	**4·50 + 2·20**	240
E(60, 0)	**4·60 + 2·0**	240

El máximo se produce en 2 vértices, por lo tanto, el máximo beneficio se genera a lo largo de uno de sus lados, con las soluciones anteriormente expuestas.

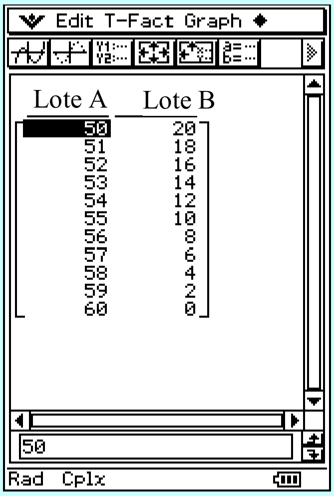
(3) Método mediante producto de matrices:

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 50 & 60 \\ 0 & 55 & 40 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Producto de la matriz formada por
los coeficientes de la función objetivo
y
la matriz donde aparecerían todos los vértices,
tal y como los vemos dispuestos a la derecha



El resultado del beneficio en cada vértice viene expresado en la matriz producto y que como hemos visto anteriormente, toma los valores:



RESUMEN FINAL:

"Se obtendrán máximos beneficios cuando se hagan entre 50 y 60 lotes de tipo A y su correspondiente valor de número de lotes de B que verifiquen la ecuación
y = 120 - 2x
tal y como vemos en la imagen de la izquierda, momento en el que los beneficios ascienden a 240 euros".