EL PROBLEMA DE LA CABRA

Un ejemplo para la introducción a la programación con la CASIO fx-9750G PLUS

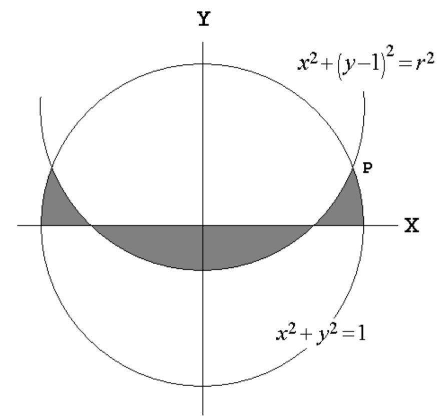
El problema.

El abuelo Pinto al morir dejó a sus dos nietos Avelino y Baudilio un prado circular en herencia. Avelino y Baudilio estaban fuertemente enemistados desde su juventud y debido a su actitud cerril no llegaban a un acuerdo para la venta de la finca. Baudilio, el más espabilado de ambos primos, no estaba dispuesto a infrautilizar la heredad; como poseía una cabra, pensó alimentarla con la hierba del prado de tal manera que su primo no pudiera denunciarlo por invadir su parte de la propiedad. Para ello clavó una estaca en un punto del perímetro del prado y ató la cabra con una cuerda. ¿De qué longitud (en función del radio del prado) ha de ser la cuerda para que la cabra pueda pastar exactamente la mitad del recinto?

La solución a través del cálculo integral.

El problema se reduce a la siguiente condición:

$$\int_{-1}^{-\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}}^{\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}} \left(1-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx + \int_{\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = 0 \qquad [1]$$



donde $\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}$ es la abscisa del punto P de corte de la circunferencia de radio unidad, $x^2+y^2=1$, y la curva, también circunferencia $x^2+(y-1)^2=r^2$. Es evidente que la longitud de la cuerda r ha de verificar $1<r<\sqrt{2}$. El valor de esa longitud es

$r = 1.15872847\ldots$.

La solución a través de la calculadora gráfica.

El programa se basa en la obtención de una raíz de la ecuación [1] mediante un proceso iterativo. Hace uso de la destreza de la calculadora para calcular integrales junto con la posibilidad de utilizar funciones definidas a trozos. Para acelerar el proceso de obtención de la raíz utiliza el método de la cuerda. En primer lugar se transforma la ecuación:

$$\int_{-1}^{-\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}}^{\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}} \left(1-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx + \int_{\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = 0$$

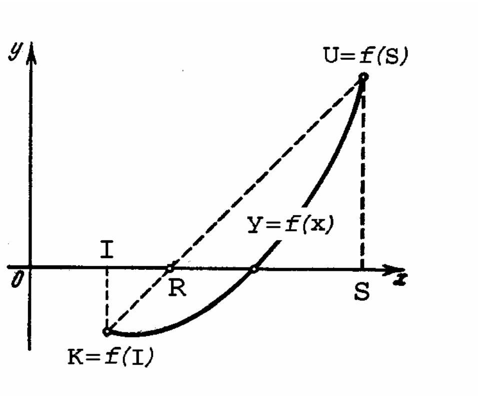
en

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \quad con \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & si \quad x < -\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2} \\ 1-\sqrt{r^2-x^2} & si \quad -\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2} \le x \le \frac{r}{2}\sqrt{4-r^2} \\ \sqrt{1-x^2} & si \quad x > \frac{r}{2}\sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

El problema es hallar el valor de r que anula la función área $área(r) = \int_{-1}^{1} f(x,r)dx$. Para ello tomamos dos valores de la abscisa donde dicha integral toma valores de signo opuesto. Estos valores son I (de inferior) y S (de superior) que toman los valores:

$$I = \sqrt{2} \qquad K = área(I) = 1 - \frac{\pi}{6} = -0.57079\ldots$$

$$S = 1 \qquad U = área(S) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0.3424\ldots$$



Los valores de la función área han sido calculados previamente. Utilizando el método de la secante se postula una posible raíz R de acuerdo con la expresión $R = \dfrac{U \cdot I - K \cdot S}{U - K}$.

A continuación se calcula el valor $A = \frac{R}{2}\sqrt{4-R^2}$ e inmediatamente se evalúa la integral $área(R) = \int_{-1}^{1} f(x,R)dx$ que se almacena en la variable T. Si el área es nulo el problema a terminado y éste el valor de r buscado. Si el valor de T es positivo estamos ante un nuevo extremo superior menor que el anterior y almacenamos su valor (en S) y el valor de su área (en U). Por el contrario si el valor de T es negativo estamos ante un nuevo extremo inferior mayor que el anterior y almacenamos su valor (en I) y el valor de su área (en K). De cualquier modo la raíz queda confinada en un nuevo intervalo (I ,S) de menor longitud a cada iteración. En la práctica y debido a la evaluación por métodos numéricos de la integral, nunca se obtiene un valor nulo para ésta. Por esta razón, el proceso iterativo cesa en cuento la integral alcanza un valor razonable muy pequeño (en nuestro caso por debajo de $1 \cdot 10^{-12}$.

El programa CABRA se transcribe a continuación:

=	=	=	=	=	=	C	A	B	R	A				=	=	=	=	=	=		01
F	I	X		9	↲																02
1	→	S	:	(	√	3	)	┘	2	-	π	┘	6	→	U	↲					03
√	2	→	I	:	1	-	π	┘	2	→	K	↲									04
L	O	C	A	T	E		1	,	1	,	“	P	R	O	B	L	E	M	A		05
D	E		L	A		C	A	B	R	A	“	↲									06
L	O	C	A	T	E		1	,	2	,	“	C	A	L	C	U	L	A	N	D	07
O	.	.	.	“	↲																08
D	O	↲																			09
(	U	I	-	K	S	)	÷	(	U	-	K	)	→	R	↲						10
0	.	5	×	R	×	√	(	4	-	R	²	)	→	A	↲						11
∫	(	√	(	1	-	X	²	)	×	(	X	>	A		O	r		X	<	-	12
A	)	+	(	1	-	√	(	R	²	-	X	²	)	)	×	(	X	≤	A		13
A	n	d		X	≥	-	A	)	,	-	1	,	1	→	T	↲					14
I	f		T	<	0	↲															15
T	h	e	n		R	→	S	:	T	→	U	↲									16

E	l	s	e		R	→	I	:	T	→	K	↵									17
I	f	E	n	d	↵																18
C	l	r	T	e	x	t	↵														19
L	O	C	A	T	E		1	,	1	,	“	*	*	*	*	*	*	*	*	*	20
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	“	↵								21
L	O	C	A	T	E		1	,	2	,	“	M	E	J	O	R		V	A	L	22
O	R		R		Y		A	R	E	A	“	↵									23
L	O	C	A	T	E		1	,	3	,	“	H	A	S	T	A		E	L		24
M	O	M	E	N	T	O		S	O	N	“	↵									25
L	O	C	A	T	E		1	,	4	,	R										26
L	O	C	A	T	E		1	,	5	,	T										27
L	O	C	A	T	E		1	,	6	,	“	*	*	*	*	*	*	*	*	*	28
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	“	↵								29
L	p	W	h	i	l	e		(	A	b	s		T	>	1	E	-	1	2	)	30
↵																					31
C	l	r	T	e	x	t	↵														32
C	l	r	G	r	a	p	h	↵													33
V	i	e	w	W	i	n	d	o	w		-	2	.	1	,	2	.	1	,	1	34
,	-	1	.	0	5	,	1	.	0	5	↵										35
r	=	T	y	p	e	↵															36
“	1	“	→	r	1	↵															37
G		S	e	l	O	n		1	↵												38
D	r	a	w	G	r	a	p	h	↵												39
Y	=	T	y	p	e	↵															40
“	1	-	√	(	R	^{2}	-	X	^{2}	)	“	→	Y	2	↵						41
G		S	e	l	O	n		2	↵												42
D	r	a	w	G	r	a	p	h	↵												41
G	r	a	p	h		∫	√	(	1	-	X	^{2}	)	×	(	X	>	A		O	42
r		X	<	-	A	)	+	(	1	-	√	(	R	^{2}	-	X	^{2}	)	)	×	43
(	X	≤	A		A	n	d		X	≥	-	A	)	,	-	1	,	1	◄		44
L	O	C	A	T	E		1	,	2	,	“	*	*	*	*	*	*	*	*	*	45

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	“	↵								46
L	O	C	A	T	E		1	,	3	,	“	L	A		S	O	L	U	C	I	47
O	N		E	S		R	=	“	↵												48
L	O	C	A	T	E		1	,	4	,	R	↵									49
L	O	C	A	T	E		1	,	5	,	“	*	*	*	*	*	*	*	*	*	50
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	“	↵								51
N	o	r	m	↵																	52

El tiempo de ejecución es de unos 25 minutos y el resultado r = 1.158728466.

Comprobación de la solución a través de la calculadora gráfica.

Ha sido descrito en la bibliografía que la solución de este problema puede ser obtenida por un método trigonométrico mediante la expresión $r = 2\cos\alpha$ con α raíz de la ecuación trascendente:

$$2\alpha\cos^2\alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0$$

Utilícese la opción F3:Solver del apartado EQUA del menú principal para obtener un valor aproximado de α próximo a 1 radián para después comprobar el valor de r.

angelap@educastur.princast.es